הפקולטה למתמטיקה, הטכניון
סמסטר חורף, תשס"ז

# בחינה בחדו"א 1/מ, מועד א' (104010)

מורה אחראי: פרופ' יואב בנימיני

- משך הבחינה שלוש שעות.
- הניקוד: יש 13 שאלות אמריקאיות. בשבע הראשונות יש לבחור תשובה נכונה מתוך חמש אפשרויות, וכל תשובה נכונה מזכה ב- 5 נקודות. בשש האחרונות יש לבחור בין שתי אפשר-ויות, וכל תשובה נכונה מזכה ב- 3 נקודות.

  יש 4 שאלות פתוחות המזכות בסך הכל - 50 נקודות (הפירוט מצויין ע"י כל סעיף).

  סך הנקודות הוא 103 אך הציון המכסימלי הוא 100!
- אין להשתמש בשום חומר עזר (כולל מחשבון וטלפון סלולרי).
- יש למלא את כל הפרטים האישיים הן בטופס התשובות האמריקאיות והן בראש כל דף תשובות לשאלות הפתוחות.
- החלק האמריקאי:
  - את התשובות לשאלות האמריקאיות יש לסמן בטופס המיועד לכך, ולהקפיד על מילוי הטופס עפ"י ההוראות.
  - יש להגיש רק את טופס התשובות, ולא את דפי השאלות.
  - יש 9 טורי בחינה שונים. מספר הטור של הבחינה שלך מופיע בראש דף השאלות האמרי-קאיות.

    יש להקפיד ולהעתיק את מספר הטור במקום המיועד לכך בטופס התשובות!
- החלק הפתוח:
  - יש למלא את הפרטים האישיים בראש כל דף.
  - יש לתת פתרון מלא ומנומק, ולהקפיד על כתיבה ברורה ומסודרת.

בהצלחה!

# שאלות אמריקאיות

שימו לב שיש הבדל בסדר השאלות בין הטפסים השונים.

שאלה 1. $\lim_{n\to\infty} n^2\left(\sin\left(1+\frac{1}{n^2}\right)-\sin 1\right)$ שווה ל-

א. $\sin 1$ ב. $0$ ג. $1$ ד. $\cos 1$ ה. $\infty$

התשובה הנכונה היא ד.
על פי הגדרת הנגזרת
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1+x)-\sin 1}{x}=\sin'(1)=\cos 1.$$
ולכן בהצבת איברי הסדרה $1/n^2$ במקום $x$ (זו סדרה שמתכנסת לאפס, ואיבריה אינם אפסים) מקבלים שהגבול המבוקש הוא $\cos 1$.

שאלה 2. תהי $f(x)=e^x-1-\sin x$ . אז

א. $\lim_{x\to\infty} f(x)$ קיים וסופי ב. $f$ חסומה ב- $(-\infty,\infty)$

ג. $f(x)\geq 0$ לכל $x\geq 0$ ד. $f$ מקבלת מינימום מוחלט ב- $(-\infty,\infty)$

ה. $f'$ חסומה מלעיל ב- $(-\infty,\infty)$

התשובה הנכונה היא ג.
$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ ולכן א' ו - ב' אינם נכונים.
באופן דומה גם ה' אינו נכון.
נבדוק תחילה שהחסם התחתון (= האינפימום) של $f$ הוא $-2$. ואמנם, לכל $x$ מתקיים $e^x-1-\sin x\geq 0-1-1=-2$, ולכן $-2$ הוא חסם מלרע, והוא החסם התחתון כי $\lim_{n\to-\infty} e^n-1-\sin(2n+\frac{1}{2})\pi=0-1-1=-2$, כלומר הפונקציה מקבלת ערכים קרובים כרצוננו לערך $-2$. אך הפונקציה אינה מקבלת את הערך $-2$, ולכן גם ד' אינו נכון.
נראה ש - ג' נכון: מאחר ש - $f(0)=0$, די להראות כי $f$ עולה ב- $[0,\infty)$, כדי להסיק ש- $f(x)\geq 0$ לכל $x\geq 0$. לשם כך נראה כי $f'(x)\geq 0$ לכל $x\geq 0$. הנגזרת היא: $f'(x)=e^x-\cos x$. מאחר ש- $e^x\geq 1$ לכל $x\geq 0$ ו- $\cos x\leq 1$ לכל $x$, $f'(x)\geq 0$ לכל $x\geq 0$, ו- $f$ עולה ב- $[0,\infty)$.

שאלה 3. כל ערכי $a$ שעבורם הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}(\cos(ax))^{-1/x^2} & x\neq 0\\ e & x=0\end{cases}$$

רציפה ב- $x=0$ הם:

א. $\pm 1$ ב. $\pm\sqrt{2}$ ג. $\pm 2$ ד. $\pm 3$ ה. $\pm\sqrt{3}$

התשובה הנכונה היא ב'.
אם $a=0$ הפונקציה ודאי אינה רציפה, ולכן נניח כי $a\neq 0$.
נקח לוגריתם ונפעיל לופיטל ונקבל כי

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\ln\left(\cos(ax))^{-1/x^2}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{-\ln\cos(ax)}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{a\sin(ax)}{2x\cos(ax)}=\frac{a^2}{2}\end{aligned}$$

(מכיון ש - $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{ax}=\lim_{x\to 0}\cos(ax)=1$).
תנאי הרציפות הוא כי $e=\lim_{x\to 0}f(x)=e^{a^2/2}$, כלומר, $a=\pm\sqrt{2}$.

שאלה 4. מספר הפתרונות של המשוואה $x^2=3-e^{-x^2}$ הוא

א. 0 ב. 1 ג. 2 ד. 3 ה. 4

התשובה הנכונה היא ג'.
הפונקציה $f(x)=x^2-3+e^{-x^2}$ רציפה ומקיימת $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\infty$ ו - $f(0)=-3$. על סמך משפט ערך הביניים יש $x_1<0<x_2$ כך ש - $f(x_1)=f(x_2)=0$, כלומר יש למשוואה לפחות שני שורשים.
כדי להראות שיש לה בדיוק שני שורשים נזכור כי ע"ס משפט Rolle בין כל שני אפסים של הפונקציה יש אפס לנגזרת, אך למשוואה $f'(x)=2x(1-e^{-x^2})=0$ יש רק פתרון יחיד: $x=0$ (כי $e^{-x^2}<1$ לכל $x\neq 0$), לכן למשוואה המקורית יש לכל היותר שני שורשים.
צירוף שני החלקים מראה שלמשוואה יש בדיוק שני שורשים.

שאלה 5. תהי $F(x)=\int_0^x \sin(t^2)\,dt$ . אז

א. $F$ קמורה ב- $[-10,10]$

ב. $F$ מונוטונית ב- $[-10,10]$

ג. $\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^2}=1$

ד. $F(x)\geq x$ לכל $x\geq 0$

ה. $F(x)\leq \frac{x^3}{3}$ לכל $x\geq 0$

התשובה הנכונה היא ה'.

על סמך המשפט היסודי של החדו"א $F'(x)=\sin(x^2)$. לכן גם $F'(x)$ וגם $F''(x)=2x\cos(x^2)$ משנות סימן בקטע $[-10,10]$, ולכן $F$ איננה מונוטונית ואיננה קמורה בקטע.

ג' אינו נכון כי על פי לופיטל

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{2x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x^2}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x}=0\end{aligned}$$

(כי $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x^2}=1$).

אילו היה ד' נכון אז מתוך $\sin s\leq 1$ היינו מקבלים לכל $x\geq 0$ ש-

$$x\leq F(x)=\int_0^x \sin(t^2)\,dt\leq \int_0^x 1dt=x$$

ולכו אי השוויון הוא למעשה שוויון, ובפרט $\sin(t^2)=1$ לכל $0\leq t\leq x$, מה שאיננו נכון.

כדי להראות ש - ה' נכון נשתמש בכך ש - $\sin s\leq s$ לכל $s\geq 0$ ונקבל כי

$$F(x)=\int_0^x \sin(t^2)\,dt\leq \int_0^x t^2dt=x^3/3.$$

שאלה 6. סמנו מיהם כל האינטגרלים המתכנסים מבין האינטגרלים המוכללים הבאים.

1. $\int_3^\infty \frac{\ln^2 x}{x^2}\,dx$

2. $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx$

3. $\int_0^1 \frac{\cos x}{x}\,dx$

א. $1,2$ ב. $1,3$ ג. $1$ ד. $2$ ה. כולם

התשובה הנכונה היא א'.

$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x}{x^2}\Big/\frac{1}{x^{3/2}}=0$ והאינטגרל $\int_3^\infty \frac{1}{x^{3/2}}dx$ מתכנס (כי $3/2>1$). על סמך מבחן ההשוואה גם

האינטגרל (1) מתכנס.
אינטגרציה בחלקים נותנת כי

$$\int_1^\infty \frac{\cos x}{x}dx = \frac{\sin x}{x}\Big|_1^\infty + \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}dx.$$

המחובר הראשון סופי כי $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$, ואילו $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}dx$ מתכנס בהחלט כי $|\sin x| \le 1$ ו - $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ מתכנס. לכן גם האינטגרל (2) מתכנס.

האינטגרל (3) איננו מתכנס כי $\lim_{x\to 0+}\frac{\cos x}{x}\Big/\frac{1}{x} = \cos 1 > 0$, והאינטגרל $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ איננו מתכנס.

<u>שאלה 7.</u> רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{2^n}{n} + \frac{3^n}{n!} + \frac{1}{n}\right)x^n$ הוא

א. $0$ ב. $\frac{1}{2}$ ג. $\frac{1}{3}$ ד. $1$ ה. $\infty$

התשובה הנכונה היא ב'.
הטור הוא סכום של שלושה טורים:
$\sum_{n=1}^\infty \frac{2^n}{n}x^n$ שרדיוס ההתכנסות שלו הוא $\frac{1}{2}$.
הטור $\sum_{n=1}^\infty \frac{3^n}{n!}x^n$ שרדיוס ההתכנסות שלו הוא אינסופי.
והטור $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}x^n$ שרדיוס ההתכנסות שלו הוא $1$.
שלושת הטורים מתכנסים עבור $|x| < \frac{1}{2}$ ולכן $R \ge \frac{1}{2}$. אך אם $x > \frac{1}{2}$ הטור הראשון מתבדר, והיות שלכל הטורים אברים חיוביים (כי בפרט $x > 0$) גם סכום שלושת הטורים מתבדר. לכן $R = \frac{1}{2}$.

## שאלות נכון/ לא נכון

<u>שאלה 8.</u> תהי $f$ גזירה בסביבה של הנקודה $x = 2$, $f'(x) > 0$ בסביבה זו, ו- $f'(2) = 7$. אז $(f^{-1})'(7) = \frac{1}{2}$.

א. נכון ב. לא נכון

לא נכון.
הנוסחה הנכונה היא $(f^{-1})'(7) = \frac{1}{f'(f^{-1}(7))}$, ואין לנו נתונים לחישוב אגף ימין.

שאלה 9. השגיאה בקירוב של $e^{1/2}$ באמצעות פולינום טיילור מסדר 5 סביב 0 של $e^x$ קטנה מ- $10^{-4}$.

א. נכון ב. לא נכון

נכון.
השארית ניתנת ע"י

$$R_6(e^{1/2}) = \frac{e^c}{6!}\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{e^c}{6!\,2^6}$$

כאשר $0 < c < \frac{1}{2}$, ולכן $e^c < e < 3$. חישוב ישיר מראה כי

$$\frac{3}{6!\,2^6} = \frac{3}{720 \cdot 64} < \frac{1}{10000}.$$

שאלה 10. תהי $f$ רציפה בקטע $(-1,1)$, גזירה בכל $x \neq 0$, ו- $f'(x) \geq 0$ לכל $x \neq 0$ בקטע, אז $f$ מונוטונית עולה בקטע.

א. נכון ב. לא נכון

נכון.
בכל אחד מהקטעים החלקיים $[-1,0]$, $[0,1]$ בנפרד הפונקציה מונוטונית, כי היא רציפה ובעלת נגזרת אי-שלילית בקטע הפתוח המתאים. ואם $-1 < x < 0 < y < 1$ אז $f(x) \leq f(0)$ על סמך המונוטונית בקטע $[-1,0]$ ובאופן דומה $f(0) \leq f(y)$, ולכן $f(x) \leq f(y)$.

שאלה 11. תהי $f$ רציפה על כל הישר, ו- $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$. אז $f$ מקבלת מינימום מוחלט ומקסימום מוחלט ב- $(-\infty,\infty)$.

א. נכון ב. לא נכון

לא נכון.
הפונקציה אמנם מקבלת מינימום מוחלט (הוכיחו זאת!) אך אינה חייבת לקבל מקסימום מוחלט.
למשל $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ מקיימת את התנאי אך $f(x) < 1$ לכל $x$.

שאלה 12. סדרת הפונקציות $f_n(x) = x^n$ מתכנסת במידה שווה בקטע $(-1,1]$.

א. נכון ב. לא נכון

לא נכון.
המועמדת להיות פונקצית הגבול היא הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

אך ההתכנסות איננה במידה שווה. אפשר לראות זאת בשני אופנים:
א. גבול במ"ש של פונקציות רציפות הוא פונקציה רציפה, אך $f$ איננה רציפה.
ב. נקבע $n$, ואז $f_n(1) = f(1) = 1$ ולכן

$$\begin{aligned} M_n &= \sup_{-1<x\leq 1} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{-1<x<1} |f_n(x) - f(x)| \\ &= \sup_{-1<x<1} |x^n - 0| = \sup_{-1<x<1} |x^n| = 1 \end{aligned}$$

כלומר $M_n \not\to 0$ ואין התכנסות במ"ש.

שאלה 13. חלקיק נע על הישר כך שבזמן $t = 0$ הוא נמצא בראשית, ומהירותו בזמן $t$ (הנמדד בשניות) היא $v(t) = \frac{1}{2} - \sin(2t)$ ס"מ לשניה. אז בזמן $t = \frac{\pi}{4}$ הוא נמצא שמאלה מהראשית.

א. נכון ב. לא נכון

נכון.
המיקום של החלקיק בזמן $T$ ניתן ע"י

$$\begin{aligned} S(T) &= \int_0^T v(t)dt = \int_0^T \left(\frac{1}{2} - \sin(2t)\right) dt \\ &= \frac{1}{2}\big(t + \cos(2t)\big)\Big|_0^T = \frac{1}{2}\big(T + \cos(2T) - 1\big) \end{aligned}$$

ועבור $T = \pi/4$ מקבלים $S\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 1\right) < 0$, כלומר החלקיק נמצא שמאלה מהראשית.

# שאלות פתוחות

<u>שאלה 1.</u>

(5%) א. הגדירו: הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

נסמו ב - $S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ את הסכום החלקי ה - $k$-י של הטור. אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס (וסכומו $S$) אם הסדרה $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת (וגבולה $S$).

(5%) ב. נסחו במדוייק את מבחן האינטגרל, הקושר בין התכנסות טור חיובי ואינטגרל מוכלל.

תהי $f$ פונקציה מונוטונית יורדת ואי-שלילית בקרן $[1,\infty)$. אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ מתכנס אם האיטגרל המוכלל $\int_1^{\infty} f(x)dx$ מתכנס.

(10%) ג. הוכיחו את מבחן ההשוואה לטורים חיוביים: אם $0 \le a_n \le b_n$ לכל $n$, ואם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס, אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
צטטו במדוייק את כל המשפטים שעליהם אתם מסתמכים.

ראינו בכיתה שטור עם אברים חיוביים $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ מתכנס אם סדרת הסכומים החלקיים שלו $S_k = \sum_{n=1}^{k} c_n$ חסומה.

נסמן ב - $A_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ את הסכומים החלקיים של $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ וב - $B_k = \sum_{n=1}^{k} b_n$ את הסכומים החלקיים של $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. על פי הנתון הסדרה $\{B_k\}$ חסומה. נסמן ב - $B$ חסם מלעיל שלה, כלומר $B_k \le B$ לכל $k$.

היות ש- $a_n \le b_n$ לכל $n$, נקבל כי גם

$$A_k = \sum_{n=1}^{k} a_n \le \sum_{n=1}^{k} b_n = B_k \le B$$

לכל $k$. כלומר, הסדרה $\{A_k\}$ חסומה אף היא, ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

שאלה 2. (10%)

הוכיחו כי אם $f$ גזירה בנקודה $x_0$, אז היא רציפה בנקודה $x_0$.

יש להוכיח כי $\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=0$. מההנחה נובע כי $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$ קיים וסופי, ולכן עפ"י כללי האריתמטיקה של גבולות

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0\end{aligned}$$

שאלה 3. (10%)

נגדיר סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ על-ידי: $a_1=2$ ו- $a_{n+1}=4-\frac{3}{a_n}$. הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

צטטו במדוייק את כל המשפטים שעליהם אתם מסתמכים.

נראה תחילה באינדוקציה שהסדרה מונוטונית עולה, וחסומה מלרע על ידי 2, כלומר נראה ש- $a_{n+1}>a_n\geq 2$ לכל $n\geq 1$:

עבור $n=1$ נקבל $a_2=4-\frac{3}{a_1}=4-\frac{3}{2}>2=a_1\geq 2$.

אם נניח כי $a_n>a_{n-1}\geq 2$, אז (מאחר ש- $a_n$ ו- $a_{n-1}$ שניהם חיוביים) $\frac{3}{a_n}<\frac{3}{a_{n-1}}$, ולכן

$$a_{n+1}=4-\frac{3}{a_n}>4-\frac{3}{a_{n-1}}=a_n\geq 2\,.$$

(האי שויון האחרון הוא חלק מהנחת האינדוקציה!).

מכך ש- $a_n\geq 2$ לכל $n$, נובע ש - $\frac{3}{a_n}>0$, ולכן

$$a_{n+1}=4-\frac{3}{a_n}<4$$

לכל $n$, והסדרה חסומה מלעיל.

על סמך המשפט שסדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת, נקבל כי $\lim a_n$ קיים, ונסמנו ב - $L$.

נעבור לגבול במשוואה $a_{n+1}=4-\frac{3}{a_n}$ ונקבל כי $L=4-\frac{3}{L}$ או $L^2-4L+3=0$. למשוואה זו שני פתרונות $L=1$ ו- $L=3$, אך $L=1$ איננו יכול להיות הגבול: כבר $a_1=2>1$ והסדרה מונוטונית עולה!

לכן $\lim_{n\to\infty}a_n=3$.

שאלה 4. (10%)

(משיעורי הבית) חשבו את $\int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx$.

נציב $y = \frac{1}{x}$. אז $dy = \frac{-dx}{x^2}$, הנקודה $x = 0$ מתאימה ל- $y = \infty$ והנקודה $x = 1$ מתאימה ל - $y = 1$.
לכן

$$\int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} \frac{dx}{x^2} = -\int_\infty^1 y e^{-y}\,dy = \int_1^\infty y e^{-y}\,dy$$

את האינטגרל האחרון נחשב על ידי אינטגרציה בחלקים נקבל

$$-ye^{-y}\Big|_1^\infty + \int_1^\infty e^{-y} dy = -ye^{-y} - e^{-y}\Big|_1^\infty = 2e^{-1}.$$